Solution de M. El Haouari,
professeur en CPGE de TANGER. Envoyer vos remarques et commentaires à l'adresse électronique suivante: elhaouarimed@yahoo.fr.

À PROPOS DE LA CONDUCTION ÉLECTRIQUE

I: Conduction dans un solide semi-conducteur

I.A: Mesure directe de la conductivité

1: Le courant dans la plaque est à symétrie cylindrique,ainsi: le vecteur densité de courant en un point M est:

$$\overrightarrow{J}(M) = j(r)\overrightarrow{e}_r$$

L'intensité du courant est égale au flux de $\overrightarrow{J}(M)$ à travers tout cylindre d'axe (Az) de rayon r et de hauteur ϵ.

$$i = \int\int \overrightarrow{J}(M).d\overrightarrow{S} = 2\pi r\epsilon j(r)$$

Soit:

$$j(r) = \frac{i}{2\pi r\epsilon}$$

La différence de potentielle (d.d.p) recherchée est égale à la circulation du champ électrique entre M_1 et M_2:

$$V(M_1) - V(M_2) = \int_{M_1 \to M_2} \overrightarrow{E}d\overrightarrow{l}$$

Le champ électrique est déduit de la loi d'ohm locale:

$$\overrightarrow{J}(M) = \gamma\overrightarrow{E}(M)$$

donc:

$$V(M_1) - V(M_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{i}{2\pi\gamma r\epsilon}dr = \frac{i}{2\pi\gamma\epsilon}ln(\frac{r_2}{r_1})$$

2: Dans le cas où les deux électrodes sont reliées à la plaque: le courant (i) arrivant en (A) ressort de l'électrode reliée en (D). La linéarité des équations de maxwell, permet de considérer que le problème comme la superposition de deux situations suivantes:

Situation (1): elle correspond à un courant la densité en M:

$$\overrightarrow{J}(M) = \frac{+i}{2\pi r_1\epsilon}\overrightarrow{e}_{r_1}$$

et une d.d.p entre deux points M_1 et M_2:

$$(V(M_1) - V(M_2))_{situation(1)} = \frac{i}{2\pi\gamma\epsilon}ln(\frac{r_2}{r_1})$$

Situation (2): elle correspond à un courant la densité en M:

$$\overrightarrow{J'}(M) = \frac{-i}{2\pi r'_1\epsilon}\overrightarrow{e}_{r'_1}$$

et une d.d.p entre deux points M_1 et M_2:

$$(V(M_1) - V(M_2))_{situation(2)} = \frac{-i}{2\pi\gamma\epsilon}ln(\frac{r'_2}{r'_1})$$

La d.d.p entre deux points M_1 et M_2 est donc:

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi\gamma\epsilon} ln(\frac{r_2 r_1'}{r_1 r_2'})$$

La densité de courant résultante en (M) est:

$$\overrightarrow{J}(M) = \frac{i}{2\pi\epsilon}(\frac{\overrightarrow{e}_{r_1}}{r_1} - \frac{\overrightarrow{e}_{r_1'}}{r_1'})$$

Si les points M_1 et M_2 appartiennent au plan médiateur du segment AD, alors $r_1 = r_1'$ et $r_2 = r_2'$: donc la d.d.p est nulle

$$V(M_1) - V(M_2) = 0$$

Le plan médiateur est une surface équipotentielle, pour tout point M appartenant à ce plan, le champ électrique et le vecteur densité de courant $\overrightarrow{J}(M)$ sont perpendiculaires à cette surface.
3:La d.d.p entre les deux électrodes est, si $l >> a$:

$$V(A) - V(D) \simeq \frac{i}{2\pi\gamma\epsilon} ln(\frac{(l)^2}{(a)^2}) = \frac{i}{\pi\gamma\epsilon} ln(\frac{l}{a})$$

La résistance de la plaque est donc:

$$R = \frac{1}{\pi\gamma\epsilon} ln(\frac{l}{a}) = R_0 ln(\frac{l}{a})$$

avec $R_0 = \frac{1}{\pi\gamma\epsilon}$
4:Application numérique: $R = 53m\Omega$, elle s'agit d'une faible valeur mais mesurable par des méthodes adaptées à cette gamme de résistance.
5: Dans le cas de la géométrie de Van Der Pauw, on a: $r_1' = r_1\sqrt{2}$ et $r_2 = r_2'\sqrt{2}$ d'où:

$$V_P - V_Q = \frac{i}{\pi\gamma\epsilon} ln(\sqrt{2})$$

et

$$R_{\parallel} = \frac{1}{\pi\gamma\epsilon} ln(\sqrt{2})$$

I.B: Effet Hall
6: La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un porteur de charge de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit:

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -f\overrightarrow{v} + q\overrightarrow{E}$$

La vitesse limite en régime permanent est alors:

$$\overrightarrow{v}_l = \frac{q}{f}\overrightarrow{E}$$

d'où la densité de courant:

$$\overrightarrow{j} = \frac{n_0 q^2}{f}\overrightarrow{E} = \gamma\overrightarrow{E}$$

γ est la conductivité du matériau.
7: En présence du champ magnétique, la relation fondamentale donne:

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -f\overrightarrow{v} + q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

En régime établi, on a:

$$-f\overrightarrow{v} + q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}$$

qui conduit à la relation demandée:

$$\frac{\overrightarrow{j}}{\gamma} = \overrightarrow{E} + \mathcal{R}\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$$

avec $\mathcal{R} = \frac{1}{nq}$

8: La loi locale de la conservation de la charge s'écrit:

$$div\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En régime permanent, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ donc:

$$div\,\overrightarrow{j} = 0$$

9: On montre aisément que: $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}$

10: On a d'après l'équation de Maxwell-Gauss: $\rho = \epsilon_0 div\overrightarrow{E} = \epsilon_0 div(\frac{\overrightarrow{j}}{\gamma} - \mathcal{R}\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}) = 0$

11:

$$R_\perp = \frac{\mathcal{R}B}{2\epsilon}$$

12: La mesure de $R_\perp$ permet la determination soit de l'intensité du champ magnétique connaissant les caractéristiques du matériau, ou la valeur de la densité particulaire connaissant le champ appliqué.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

II: Conduction dans un plasma à basse fréquence

II.A.- Courant électrique dans un plasma

13: C'est l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

II.B.- Vitesses, Courant et forces

14: La masse d'un ion est supérieure à celle d'un proton: $m_P \geq 1,675.10^{-27}kg$ et celle d'un électron: $m_e = 0,911.10^{-30}kg$ d'où: $\frac{m_p}{m_e} \geq 1836$

15: Il s'agit de la vitesse du barycentre de masse du système formé par les deux particules: ion + électron.

$$\overrightarrow{V} = \frac{m_p\overrightarrow{v}_p + m_e\overrightarrow{v}_e}{m_p + m_e}$$

La densité de courant s'écrit: $\overrightarrow{j} = n_0 e(\overrightarrow{v}_p - \overrightarrow{v}_e)$ En tenant compte des deux relations précédentes, les expressions approchées des vitesses des deux porteurs sont:

$$\overrightarrow{v}_e = \overrightarrow{V} - \frac{\overrightarrow{j}}{n_0 e}$$

$$\overrightarrow{v}_p \simeq \overrightarrow{V}$$

16: La force élémentaire s'exerçant sur l'élément de volume $d\tau$ est:

$$d\overrightarrow{F}_e = \overrightarrow{f}_v d\tau + dN.(-e)(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B})$$

$$d\overrightarrow{F}_e = (\overrightarrow{f}_v + n_0.(-e)(\overrightarrow{E} + (\overrightarrow{V} - \frac{\overrightarrow{j}}{n_0 e}) \wedge \overrightarrow{B}))d\tau$$

17: On a de même:

$$d\overrightarrow{F}_p = (-\overrightarrow{f}_v + n_0.e(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}))d\tau$$

Leurs résultantes s'écrit:

$$d\overrightarrow{F} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B} d\tau$$

qui correspond à la force de Laplace élémentaire s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ du plasma.

II.C.- Modèle collisionnel pour le plasma

18: Au cours d'un choc élastique, il y a conservation de la quantité de mouvement et d'énergie cinétique:

$$m_p\overrightarrow{v}_p + m_e\overrightarrow{v}_e = m_p\overrightarrow{v'}_p + m_e\overrightarrow{v'}_e$$

$$\frac{1}{2}m_p\overrightarrow{v}_p^2+\frac{1}{2}m_e\overrightarrow{v}_e^2=\frac{1}{2}m_p\overrightarrow{v'}_p^2+\frac{1}{2}m_e\overrightarrow{v'}_e^2$$

Soit:

$$m_pv_p-m_ev_e=-m_pw_p+m_ew_e$$

$$m_pv_p^2+m_ev_e^2=m_pw_p^2+m_ew_e^2$$

Qui conduit à la relation demandée:

$$v_p+v_e=w_p+w_e$$

19: La quantité recherchée est la variation de la quantité de mouvement d'un électron du plasma au cours d'une collision:

$$m_e(\overrightarrow{v'}_e-\overrightarrow{v}_e)\overrightarrow{e}_x=m_e(w_e+v_e)$$

En tenant compte des deux relations suivantes :

:

$$m_pv_p-m_ev_e=-m_pw_p+m_ew_e$$
$$v_p+v_e=w_p+w_e$$

on obtient:

$$m_e(w_e+v_e)=2\frac{m_em_p}{m_e+m_p}(v_e+v_p)$$

$\alpha=2$

20: Si τ est la durée moyenne d'un choc, $\frac{m_e(\overrightarrow{v'}_e-\overrightarrow{v}_e)}{\tau}$ correspond à la force s'exerçant sur l'électron par collision avec les ions. La force due aux collisions s'exerçant sur un élément de volume du plasma est alors: $\frac{m_e(\overrightarrow{v'}_e-\overrightarrow{v}_e)}{\tau}dN$ d'où: la force volumique:

$$\overrightarrow{f}_v=n_0\frac{m_e(\overrightarrow{v'}_e-\overrightarrow{v}_e)}{\tau}\simeq-\frac{n_0m_e}{\tau}(\overrightarrow{v}_e-\overrightarrow{v}_p)$$

21: En négligeant l'accélération des électrons, on a :

$$d\overrightarrow{F}_e=(\overrightarrow{f}_v+n_0.(-e)(\overrightarrow{E}+(\overrightarrow{V}-\frac{\overrightarrow{j}}{n_0e})\wedge\overrightarrow{B}))d\tau=\overrightarrow{0}$$

Soit:

$$(-\frac{n_0m_e}{\tau}(\overrightarrow{v}_e-\overrightarrow{v}_p)+n_0.(-e)(\overrightarrow{E}+(\overrightarrow{V}-\frac{\overrightarrow{j}}{n_0e})\wedge\overrightarrow{B}))=\overrightarrow{0}$$

Sachant que: $\overrightarrow{j}=n_0e(\overrightarrow{v}_p-\overrightarrow{v}_e)$, on en déduit:

$$\overrightarrow{j}=\gamma(\overrightarrow{E}+\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{B}-\frac{1}{n_0e}\overrightarrow{J}\wedge\overrightarrow{B})$$

Avec: $\gamma=\frac{n_0e^2\tau}{m\overrightarrow{e}}$

II.D. Ondes magnétohydrodynamiques dans un plasma

22: L'équation de maxwell relative au flux s'écrit en point du plasma:

$$div(\overrightarrow{B})=0$$

soit

$$\frac{\partial b_z(z,t)}{\partial z}=-ik\overrightarrow{e}_z.\overrightarrow{b}=0$$

Qui donne:

$$\overrightarrow{b}_0\overrightarrow{e}_z=\overrightarrow{0}$$

Le vecteur densité de courant est déduit de l'équation de Maxwell-Ampère: $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J}$ D'où:

$$\overrightarrow{j} = \frac{-ik\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{b}}{\mu_0}$$

23: De l'équation simplifiée de la dynamique du plasma est:

$$\rho_m \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$$

On tire la vitesse d'ensemble:

$$\overrightarrow{V} \simeq -\frac{kB_0 e^{i(\omega t - kz)}}{\mu_0 \omega n_0 m_p} \overrightarrow{b}_0$$

24: L'équation de Maxwell-Faraday: $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ conduit à la relation de dispersion à partir de laquelle on tire la vitesse de phase des ondes électromagnétique dans le plasma:

$$c_A = \sqrt{\frac{B_0}{n_0 m_p \mu_0}}$$